الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل:

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

نعتبر النقطتين $A\left(3;-2;2\right)$ و $B\left(0;4;-1\right)$.

.1 أُكتب معادلة للمستوي $\left(P_1\right)$ الذي يشمل A و $\vec{u}\left(1;0;-1\right)$ شعاع ناظمي له.

.2 $\left(P_2\right)$ المستوي الذي يحوي المستقيم $\left(AB\right)$ ويعامد المستوي $\left(P_1\right)$.

أ - بيّن أنّ $\vec{v}\left(1;1;1\right)$ شعاع ناظمي للمستوي $\left(P_2\right)$.

ب - أُكتب معادلة للمستوي $\left(P_2\right)$.

.3 نعتبر النقطتين C و D حيث: $C\left(6;1;5\right)$ و D معرّفة بـ: $\overrightarrow{CD}\left(0;-3;-6\right)$.

أ - بيّن أنّ المثلث ACD قائم في A واحسب مساحته.

ب - بيّن أنّ المستقيم $\left(AB\right)$ عمودي على المستوي $\left(ACD\right)$.

جـ - أُحسب حجم رباعي الوجوه $ACDB$.

التمرين الثاني:

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، النقطة A ذات اللاحقة $z_0=1+i$

1) أ) عيّن ثّم أنشئ $\left(\gamma\right)$ مجموعة النقط $M\left(z\right)$ من المستوي حيث: $z=z_0+2e^{i\theta}$ و θ يمسح $\mathbb{R}$.

ب) عيّن ثم أنشئ $\left(\gamma'\right)$ مجموعة النقط $M\left(z\right)$ من المستوي حيث: $z=z_0+ke^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$ و k يمسح $\mathbb{R}^+$

ج) عيّن إحداثيات نقطة تقاطع $\left(\gamma\right)$ و $\left(\gamma'\right)$.

2) نسمي B النقطة التي لاحقتها z_1 حيث $z_1=z_0+2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$

أ) عيّن الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{z_1-z_0}{z_0}$، ثم استنتج طبيعة المثلث OAB.

ب) عيّن z_2 لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

ج) عيّن العددين α و β بحيث تكون النقطة O مرجحا للجملة $\left\{\left(A;\alpha\right),\left(B;\beta\right)\right\}$ و $\alpha+\beta=\sqrt{2}$

د) عيّن ثم أنشئ $\left(E\right)$مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left(\left(1+\sqrt{2}\right)\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right)=0$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

التمرين الثالث:

I) نعتبر الدّالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(2-x)e^{x}-2$

1/ ادرس تغيّرات الدالة g.

2/ بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث $1.59<\alpha<1.60$

3/ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^{2}}{e^{x}-1};x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ بيّن أنّ الدالة f مستمرة عند القيمة $x_0=0$.

2/ ادرس قابلية إشتقاق الدالة f عند $x_0=0$ ثم فسر النتيجة.

3/ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

4/ أ ـ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم ، $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{(e^{x}-1)^{2}}$

ب ـ استنتج اتجاه تغيّر الدالة f وشكل جدول تغيّراتها.

5/ أ ـ بيّن أنّ $f(\alpha)=\alpha(2-\alpha)$، ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

ب ـ ليكن (Γ) المنحنى الممثل للدالة K المعرفة على المجال $]-\infty;0]$ بـ: $K(x)=-x^{2}$

ـ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-K(x)]$ ماذا تستنتج ؟

ـ ادرس الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة لـ(Γ) على المجال $]-\infty;0]$.

جـ ـ ارسم (Γ) و (C_f).

6/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة التالية: $x^{2}-me^{x}+m=0$

التمرين الرابع:

(u_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0=5$ و $3u_{n+1}=u_n+4$.

1) احسب u_1 و u_2

2) برهن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n\geq 2$.

3) بيّن أنّ (u_n) متناقصة، ثمّ استنتج أنّ (u_n) متقاربة. احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=u_n-2$.

ـ بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية، ثمّ اكتب v_n بدلالة n.

5) ليكن: $S_n=v_0+v_1+...+v_n$ و $T_n=u_0+u_1+...+u_n$

ـ عين بدلالة n، عبارتي S_n و T_n، ثمّ احسب نهايتيهما.

aziz_mus1@hotmail.fr

الموضوع الثاني

التمرين الأوّل:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

نعتبر النقط $A(1;0;0)$، $B(0;2;0)$، $C(0;0;3)$ و $G\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};1\right)$ ، (D) المستقيم الذي يشمل النقطة A وشعاع توجيهه $\vec{u}\left(-1;1;\frac{3}{2}\right)$ و (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة C وشعاع توجيهه $\vec{v}\left(\frac{1}{2};1;-3\right)$

1. أكتب تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمين (D) و (Δ) ثمّ ادرس الوضع النسبي لهما.
2. بيّن أنّ : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للنقطة G؟
3. عيّن شعاعا ناظميا $\vec{n}$ للمستوي (ABC)؛ ثمّ أكتب معادلة له.
4. أحسب المسافة بين النقطة O والمستوي (ABC).
5. H المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم (D).

أ - جد احداثيات النقطة H.

ب - استنتج المسافة بين النقطة B والمستقيم (D).

التمرين الثاني:

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. الوحدة $2cm$

نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين: $z_A=i$ و $z_B=2$ على الترتيب

1. أ - عين لاحقة النقطة B_1 صورة النقطة B بالتحاكي h الذي مركزه A ونسبته $\sqrt{2}$

ب - عيّن لاحقة النقطة B' صورة النقطة B_1 بالدوران r الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

2. نعتبر التحويل النقطي f الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' بحيث:

$$z'=(1+i)z+1$$

أ - عيّن طبيعة التحويل f وعناصره المميزة؛ ثم استنتج أنّ B' هي صورة B بالتحويل f.

ب - بيّن أنه من أجل كل عدد مركب z يختلف عن i لدينا: $\frac{z'-z}{z_A-z}=-i$

ج - استنتج طبيعة المثلث AMM'.

3. أ - حدد الطبيعة والعناصر المميزة لـ (E) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي بحيث: $|z-2|=\sqrt{2}$

ب - بيّن أنّ $z'-3-2i=(1+i)(z-2)$ ، ثم استنتج أنه إذا كانت $M\in(E)$ فإنّ M' تنتمي لدائرة (C) يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

التمرين الثالث:

1. نعتبر الدّالة f المعرّفة على $[0;+\infty[$ بالشكل: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}; x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

. بيّن أنّ f مستمرة عند 0.

2. لتكن الدّالة g المعرّفة على $[0;+\infty[$ بالشكل: $g(x)=\ln(x+1)-\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\right)$

أ - ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g.

ب - احسب $g(0)$ ثمّ استنتج أنّه على المجال $[0;+\infty[$: $\ln(x+1)\leq\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\right)$.

جـ - بطريقة مماثلة، بيّن أنه على المجال $[0;+\infty[$: $\ln(x+1)\geq\left(x-\dfrac{x^2}{2}\right)$.

د - استنتج، من الأسئلة السابقة أنّ: $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{3}\geq\dfrac{\ln(x+1)-x}{x^2}\leq-\dfrac{1}{2}$. وأنّ f قابلة للاشتقاق عند 0.

3. لتكن الدالة h المعرّفة على $[0;+\infty[$ بـ: $h(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1)$.

أ - ادرس اتجاه تغيّر الدّالة h، ثمّ عيّن إشارة $h(x)$ حسب قيّم x.

ب - بيّن أنّه من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{h(x)}{x^2}$.

جـ - أعط جدول تغيّرات f موضحا نهاية f عند $+\infty$.

د - أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

4. ارسم (T) و (C_f).

التمرين الرابع:

I) f هي الدالة المعرّفة على المجال بـ: $f(x)=x-\ln(x-1)$

1) حدّد حسب قيم x، إشارة $f(x)-x$

2) أ - عيّن اتجاه تغيّر الدالة f.

ب - بيّن أنه إذا كان $x\in[2;e+1]$ فإنّ $f(x)\in[2;e+1]$

II) المتتالية المعرّفة (u_n) على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0=e+1$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_{n+1}=u_n-\ln(u_n-1)$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_n\in[2;e+1]$.

2) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n).

3) برّر تقارب المتتالية (u_n)، ثم احسب نهايتها.

الموضوع الأوّل:

التمرين الأوّل:

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

نعتبر النقطتين $A\left(3;-2;2\right)$ و $B\left(0;4;-1\right)$.

1. كتابة معادلة للمستوي $\left(P_1\right)$ الذي يشمل A و $\vec{u}\left(1;0;-1\right)$ شعاع ناظمي له.

المستوي $\left(P_1\right)$ له معادلة من الشكل $x-z+d=0$ ولدينا $A\in\left(P_1\right)$ تعني $3-2+d=0$ أي $d=-1$ وعليه $x-z-1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $\left(P_1\right)$.

2. $\left(P_2\right)$ المستوي الذي يحوي المستقيم $\left(AB\right)$ ويعامد المستوي $\left(P_1\right)$.

أ ـ تبيين أنّ $\vec{v}\left(1;1;1\right)$ شعاع ناظمي للمستوي $\left(P_2\right)$.

لدينا $\overrightarrow{AB}\left(-3;6;-3\right)$ و $\vec{u}$ شعاعي توجيه للمستوي $\left(P_2\right)$ وهما غير مرتبطين خطيا لأنّ يحوي المستقيم $\left(AB\right)$ ويعامد المستوي $\left(P_1\right)$ ولدينا $\vec{v}.\vec{u}=1\times1+1\times0+1\left(-1\right)=0$ و $\vec{v}.\overrightarrow{AB}=1\left(-3\right)+1\times6+1\left(-3\right)=0$

ومنه $\vec{v}\perp\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}\perp\vec{u}$ أي شعاع ناظمي للمستوي $\left(P_2\right)$.

ب ـ كتابة معادلة للمستوي $\left(P_2\right)$.

المستوي $\left(P_2\right)$ له معادلة من الشكل $x+y+z+d=0$ ولدينا $B\in\left(P_2\right)$ تعني $0+4-1+d=0$ أي $d=-3$

وبالتالي $x+y+z-3=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $\left(P_2\right)$.

3. نعتبر النقطتين C و D حيث: $C\left(6;1;5\right)$ و D معرّفة بـ: $\overrightarrow{CD}\left(0;-3;-6\right)$.

أ ـ تبيين أنّ المثلث ACD قائم في A

لدينا $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$ ولدينا $\overrightarrow{AC}\left(3;3;3\right)$ ومنه $\overrightarrow{AD}\left(3;0;-3\right)$

إذن $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=3\times3+3\times0+3\left(-3\right)=0$ وهذا يعني أن $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{AD}$ وبالتالي المثلث ACD قائم في A.

طريقة 2:

لدينا $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$ معناه $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AC}$

لكن $\overrightarrow{AC}^2=9+9+9=27$ و $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AC}=0\times3-3\times3-6\times3=-27$

ومنه $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}=27-27=0$ وهذا يعني أن $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{AD}$ وبالتالي المثلث ACD قائم في A.

حساب مساحته.

$$S\left(ACD\right)=\frac{AC\times AD}{2}=\frac{3\sqrt{3}\times3\sqrt{2}}{2}=\frac{9\sqrt{6}}{2}ua$$

ب ـ تبيين أنّ المستقيم $\left(AB\right)$ عمودي على المستوي $\left(ACD\right)$.

لدينا $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-3\times3+6\times3-3\times3=0$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=-3\times3+6\times0-3\left(-3\right)=0$ وهذا يعني $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$

و $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$ ومنه $\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظمي للمستوي $\left(ACD\right)$ وبالتالي المستقيم $\left(AB\right)$ يعامد المستوي $\left(ACD\right)$

جـ ـ حساب حجم رباعي الوجوه $ACDB$.

بما أن $\left(AB\right)$ يعامد المستوي $\left(ACD\right)$ فإن A هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي $\left(ACD\right)$

وعليه $V\left(ABCD\right)=\frac{1}{3}S\left(ACD\right)\times AB=\frac{1}{3}\times\frac{9\sqrt{6}}{2}\times3\sqrt{6}=27uv$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

التمرين الثاني:

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، النقطة A ذات اللاحقة $z_0=1+i$

1) أ) تعيين (γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $z=z_0+2e^{i\theta}$ و θ يمسح $\mathbb{R}$.

$z=z_0+2e^{i\theta}$ تكافئ $z-z_0=2e^{i\theta}$ ومنه $|z-z_0|=2$ أي $AM=2$

إذن (γ) هي الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها 2.

ب) تعيين (γ') مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $z=z_0+ke^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$ و k يمسح $\mathbb{R}^+$

$z=z_0+ke^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$ معناه $z-z_0=ke^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$ إذن (γ') هي نصف مستقيم مبدؤه A وميله $tag\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-1$

باستثناء النقطة A.

ج) تعيين إحداثيات نقطة تقاطع (γ) و (γ').

لتكن $M(z)$ نقطة من المستوي.

$M\in(\gamma)\cap(\gamma')$ معناه $\begin{cases} z=z_0+ke^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)} \\ z=z_0+2e^{i\theta}\end{cases}$ تكافئ $z_0+ke^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}=z_0+2e^{i\theta}$ يكافئ $ke^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}=2e^{i\theta}$

ويكافئ $\begin{cases} k=2 \\ \theta=\frac{3\pi}{4}\end{cases}$ إذن $z=z_0+2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$ أي $M\left(1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right)$.

2) نسمي B النقطة التي لاحقتها z_1 حيث $z_1=z_0+2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$

أ) تعيين الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{z_1-z_0}{z_0}$.

$$\frac{z_1-z_0}{z_0}=\frac{\left(z_0+2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}\right)-z_0}{z_0}=\frac{2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}}=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}=i\sqrt{2}$$

استنتاج طبيعة المثلث OAB.

$\frac{z_1-z_0}{z_0}=i\sqrt{2}$ معناه $\frac{z_1-z_0}{-z_0}=-i\sqrt{2}$ وهذا يعني أن $\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB}\right)=-\frac{\pi}{2}$ ومنه المثلث OAB قائم في A

ب) تعيين z_2 لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

لدينا $z_2-z_0=e^{-i\frac{\pi}{2}}\left(z_1-z_0\right)$ معناه $z_2=e^{-i\frac{\pi}{2}}\left(z_1-z_0\right)+z_0$ يكافئ $z_2=e^{-i\frac{\pi}{2}}\left(2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}\right)+z_0$

ويكافئ $z_2=2e^{i\frac{\pi}{4}}+1+i$ أي $z_2=1+\sqrt{2}+i\left(1+\sqrt{2}\right)$.

ج) تعيين العددين α و β بحيث تكون النقطة O مرجحا للجملة $\{(A;\alpha),(C;\beta)\}$ و $\alpha+\beta=\sqrt{2}$

لدينا $\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ معناه $\alpha z_0+\beta z_2=0$ وتكافئ $\alpha(1+i)+\beta\left(1+\sqrt{2}+i\left(1+\sqrt{2}\right)\right)=0$

Mostefai A/Elaziz

aziz_mus1@hotmail.fr

تكافئ $\alpha+\beta+\sqrt{2}\beta+i\left(\alpha+\beta+\sqrt{2}\beta\right)=0$ إذن $\alpha+\beta+\sqrt{2}\beta=0$ ولدينا $\alpha+\beta=\sqrt{2}$

نحصل على الجملة $\begin{cases}\alpha+\beta+\sqrt{2}\beta=0\\ \alpha+\beta=\sqrt{2}\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}\sqrt{2}+\sqrt{2}\beta=0\\ \alpha+\beta=\sqrt{2}\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}\beta=-1\\ \alpha+\beta=\sqrt{2}\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}\beta=-1\\ \alpha=\sqrt{2}+1\end{cases}$

وعليه $(\alpha;\beta)=\left(1+\sqrt{2};-1\right)$

د) تعيين (E) **مجموعة النقط** M **من المستوي حيث:** $\left(\left(1+\sqrt{2}\right)\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right)=0$

لدينا O مرجح الجملة $\left\{\left(A;\left(1+\sqrt{2}\right)\right),\left(C;-1\right)\right\}$ إذن من أجل كل نقطة M من المستوي لدينا:

$\left(1+\sqrt{2}-1\right)\overrightarrow{MO}=\left(1+\sqrt{2}\right)\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}$ أي $\sqrt{2}\overrightarrow{MO}=\left(1+\sqrt{2}\right)\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}$

ولدينا $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}$

$\left(\left(1+\sqrt{2}\right)\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right)=0$ تعني $\left(\sqrt{2}\overrightarrow{MO}\right).\overrightarrow{CA}=0$ أي $\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{CA}=0$

وبالتالي (E) هي المستقيم المار من O ويكون $\overrightarrow{CA}$ شعاع ناظمي له.

<u>التمرين الثالث:</u>

I) نعتبر الدّالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(2-x)e^{x}-2$

1/ دراسة تغيّرات الدالة g.

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x}=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2-x)e^{x}-2=\lim\limits_{x\to-\infty}2e^{x}-xe^{x}-2=-2$

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}2-x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)e^{x}-2=-\infty$

الدالة g تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $g'(x)=-e^{x}+(2-x)e^{x}=e^{x}(1-x)$

من أجل كل عدد حقيقي $e^{x}>0$، ومنه إشارة $g'(x)$ مثل إشارة $(1-x)$.

وبالتالي الدالة g متزايدة تماما على $]-\infty;1]$ ومتناقصة تماما على $[1;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة g.

x	$-\infty$	0	1	α	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-2 ↗	0 ↗	$e-2$	↘ 0	↘ $-\infty$

2/ تبيين أنّ المعادلة $g(x)=0$ **تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر** α **حيث** $1.59<\alpha<1.60$

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-\infty;1]$ ولدينا $g\left(]-\infty;1]\right)=]-2;e-2]$ و $0\in]-2;e-2]$

إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $]-\infty;1]$.

ولدينا كذلك الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$ ولدينا $g\left([1;+\infty[\right)=]-\infty;e-2]$

و $0\in]-\infty;e-2]$ إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1;+\infty[$.

وبما أن $g(0)=(2-0)e^{0}-2=0$ فإن β معدوم و $g(1.59)\approx0.01$ ، $g(1.60)\approx-0.01$ أي

$g(1.59)\times g(1.60)<0$ فإن $1.59<\alpha<1.60$.

3/ استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{e^x-1};x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ تبيين أنّ الدالة f مستمرة عند القيمة $x_0=0$.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x\left(\frac{e^x-1}{x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{e^x-1}{x}}=0=f(0)$$

إذن الدالة f مستمرة عند القيمة $x_0=0$.

2/ دراسة قابلية إشتقاق الدالة f عند $x_0=0$ ثم فسر النتيجة.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{e^x-1}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{e^x-1}{x}}=1$$

إذن الدالة f تقبل الإشتقاق عند $x_0=0$ ومنحناها البياني (C_f) يقبل مماسا عند النقطة $O(0;0)$ معامل توجيهه يساوي 1.

3/ حساب $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

لدينا $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x-1=-1$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2}{e^x-1}=-\infty$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{e^x-1}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{x^2\left(\frac{e^x}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\left(\frac{e^x}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)}=0$$ لأنّ $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=+\infty$

4/ أ ـ تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم ، $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{(e^x-1)^2}$

ليكن x عددا حقيقيا غير معدوم:

$$f'(x)=\frac{2x(e^x-1)-x^2e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{x(2e^x-2-xe^x)}{(e^x-1)^2}=\frac{x((2-x)e^x-2)}{(e^x-1)^2}=\frac{xg(x)}{(e^x-1)^2}$$

ب ـ استنتاج اتجاه تغيّر الدالة f وشكل جدول تغيّراتها.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;\alpha]$ ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f.

x	$-\infty$ α $+\infty$
$f'(x)$	$+$ $-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $f(\alpha)$ ↘ 0

5/ أ - تبيين أنّ $f(\alpha)=\alpha(2-\alpha)$،

لدينا $g(\alpha)$ معناه $(2-\alpha)e^{\alpha}-2=0$ تكافئ $e^{\alpha}=\dfrac{2}{2-\alpha}$ وتكافئ $e^{\alpha}-1=\dfrac{\alpha}{2-\alpha}$

إذن $f(\alpha)=\dfrac{\alpha^2}{e^{\alpha}-1}=\dfrac{\alpha^2}{\dfrac{\alpha}{2-\alpha}}=\alpha(2-\alpha)$

استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

لدينا $1.59<\alpha<1.60$ معناه $0.40<2-\alpha<0.41$ إذن $1.59\times 0.40<\alpha(2-\alpha)<0.60\times 0.41$

أي $0.63<f(\alpha)<0.66$

ب - ليكن (Γ) المنحنى الممثل للدالة K المعرفة على المجال $]-\infty;0]$ بـ: $K(x)=-x^2$

- حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-K(x)\right]$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-K(x)\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^x-1}+x^2=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2e^x}{e^x-1}=0$$

نستنتج أن المنحنى (Γ) منحنى مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

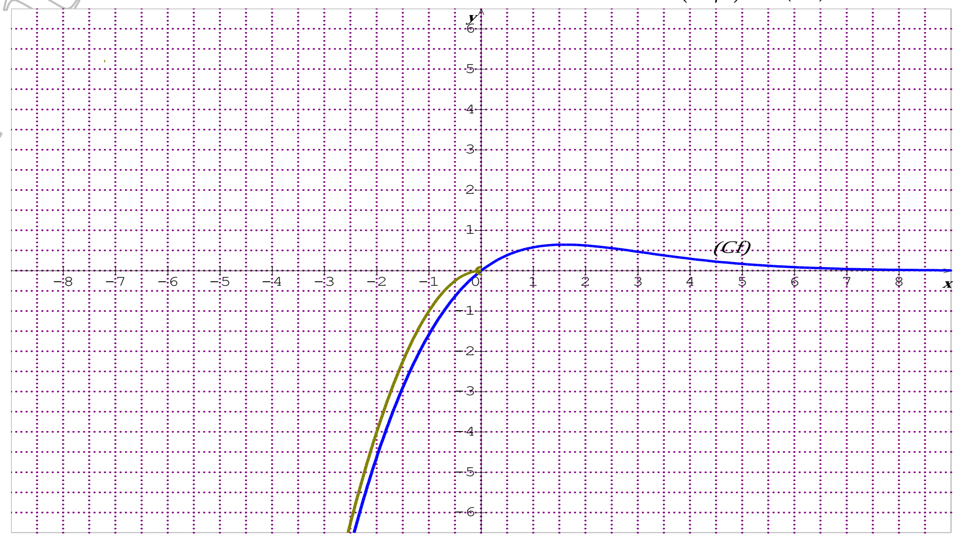
- دراسة الوضعية النسبية لـ (C_f) **بالنسبة لـ**(Γ) **على المجال** $]-\infty;0]$.

لدينا $f(x)-K(x)=\dfrac{x^2e^x}{e^x-1}$

إشارة $f(x)-K(x)$ هي نفس إشارة e^x-1

ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0]$: $e^x-1\leq 0$ ومنه المنحنى (C_f) يقع أسفل (Γ).

جـ - رسم (Γ) و (C_f).



6/ المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة التالية: $x^2 - me^x + m = 0$

$x^2 - me^x + m = 0$ تكافئ $m(e^x - 1) = x^2$ وتكافئ $m = \frac{x^2}{e^x - 1}$ أي $f(x) = m$

إذا كان $m \le 0$ فإن المعادلة تقبل حلا واحدا سالبا.

إذا كان $0 < m < \alpha(2-\alpha)$ فإن المعادلة تقبل حلين موجبين.

إذا كان $m = \alpha(2-\alpha)$ فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا.

إذا كان $m > \alpha(2-\alpha)$ فإن المعادلة لا تقبل أي حل.

التمرين الرابع:

(u_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 5$ و $3u_{n+1} = u_n + 4$.

1) حساب u_1 و u_2

لدينا $3u_1 = u_0 + 4$ معناه $3u_1 = 9$ أي $u_1 = 3$

$3u_2 = u_1 + 4$ معناه $3u_2 = 7$ أي $u_2 = \frac{7}{3}$.

2) برهان أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \ge 2$.

لدينا $u_0 = 5$ ومنه $u_0 \ge 2$ إذن مرحلة الإبتداء صحيحة

نفرض أنّ $u_n \ge 2$ ونبرهن أنّ $u_{n+1} \ge 2$

لدينا $u_n \ge 2$ معناه $u_n + 4 \ge 6$ ومنه $3u_{n+1} \ge 6$ أي $u_{n+1} \ge 2$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \ge 2$ وهذا حسب مبدأ الإستدلال بالتراجع.

3) تبيين أنّ (u_n) متناقصة.

ليكن n عددا طبيعيا:

$3u_{n+1} - 3u_n = u_n + 4 - 3u_n = 2(2-u_n)$ ومنه $3(u_{n+1} - u_n) = 2(2-u_n)$

ولدينا $u_n \ge 2$ معناه $2 - u_n \le 0$ ومنه $3(u_{n+1} - u_n) \le 0$ أي $u_{n+1} - u_n \le 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة.

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = u_n - 2$.

استنتاج أنّ (u_n) متقاربة.

بما أن (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة نحو عدد حقيقي l حيث $l \ge 2$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

لدينا (u_n) متقاربة إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$

ولدينا $3u_{n+1} = u_n + 4$ بالمرور إلى النهاية نجد $3l = l + 4$ أي $l = 2$ إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

- تبيين أنّ (v_n) متتالية هندسية،

لدينا $3v_{n+1} = 3u_{n+1} - 6$ معناه $3v_{n+1} = u_n - 2$ تكافئ $3v_{n+1} = v_n$ أي $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ وحدها الأوّل $v_0 = u_0 - 2 = 3$

كتابة v_n بدلالة n.

$$v_n = v_0 q^n = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

5) ليكن: $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

aziz_mus1@hotmail.fr

ـ تعيين بدلالة n، عبارتي S_n و T_n، ثمّ احسب نهايتيهما.

$$S_n = v_0\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right) = 3\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}\right) = \frac{9}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$T_n = (v_0+2)+(v_1+2)+\ldots+(v_n+2) = S_n + 2(n+1)$$

أي $S_n = \frac{9}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)+2(n+1)$

الموضوع الثاني:

التمرين الأوّل:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

نعتبر النقط $A(1;0;0)$، $B(0;2;0)$، $C(0;0;3)$ و $G\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};1\right)$، (D) المستقيم الذي يشمل

النقطة A وشعاع توجيهه $\vec{u}\left(-1;1;\frac{3}{2}\right)$ و (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة C وشعاع توجيهه $\vec{v}\left(\frac{1}{2};1;-3\right)$

1. كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D)

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء

$M \in (D)$ إذا وفقط إذا وُجد عدد حقيقي t بحيث $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

أي $(D):\begin{cases} x = 1-t \\ y = t \\ z = \frac{3}{2}t \end{cases};(t\in\mathbb{R})$

كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ)

$M \in (\Delta)$ معناه يوجد عدد حقيقي k بحيث $\overrightarrow{CM} = k\vec{v}$

أي $(\Delta):\begin{cases} x = \frac{1}{2}k \\ y = k \\ z = 3-3k \end{cases};(k\in\mathbb{R})$

دراسة الوضع النسبي للمستقيمين (D) و (Δ).

لدينا الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا لأنّ $\frac{1}{1} \neq \frac{\frac{1}{2}}{-1}$ ومنه المستقيمان (D) و (Δ) غير متوازيين.

ندرس تقاطعهما.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

ندرس إمكانية وجود ثنائية t و k من الأعداد الحقيقية تحقق الجملة $\begin{cases}1-t=\frac{1}{2}k \text{..........}(1)\\ t=k \text{..............}(2)\\ \frac{3}{2}t=3-3k\text{....}(3)\end{cases}$

بجمع (1) و (2) نجد $1=\frac{3}{2}k$ ومنه $k=\frac{2}{3}$ بالتعويض في جميع المعادلات نجد $\begin{cases}1-t=\frac{1}{3}\\ t=\frac{2}{3}\\ \frac{3}{2}t=1\end{cases}$

أي $\begin{cases}t=\frac{2}{3}\\ t=\frac{2}{3}\\ t=\frac{2}{3}\end{cases}$ إذن المستقيمان (D) و (Δ) متقاطعان حيث $(D)\cap(\Delta)\left\{G\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};1\right)\right\}$

2. تبيين أنّ : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$، ماذا تستنتج بالنسبة للنقطة G؟

$\overrightarrow{GA}\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3};-1\right)$ ، $\overrightarrow{GB}\left(-\frac{1}{3};\frac{4}{3};-1\right)$ و $\overrightarrow{GC}\left(-\frac{1}{3};-\frac{2}{3};2\right)$

ومنه إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$ هي $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3};-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}-\frac{2}{3};-1-1+2\right)$ أي $(0;0;0)$

مايعني أنّ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ وبما أنّ النقط A ، B و C ليست في إستقامية فإن G هي مركز ثقل المثلث ABC.

3. تعيين شعاعا ناظميا $\vec{n}$ للمستوي (ABC)؛

نضع $\vec{n}(a;b;c)$ لدينا $\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$ معناه $\begin{cases}-a+2b=0\\ -a+3c=0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}a=2b\\ -a+3c=0\end{cases}$ ويكافئ $\begin{cases}a=2b\\ c=\frac{2}{3}b\end{cases}$

نأخذ مثلا $b=3$ نجد $\vec{n}(6;3;2)$

كتابة معادلة لـ(ABC).

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء

$M\in(ABC)$ معناه $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ حيث $\overrightarrow{AM}(x-1;y;z)$

ومنه $6(x-1)+3y+2z=0$ أي $6x+3y+2z-6=0$ وهي معادلة للمستوي (ABC).

4. حساب المسافة بين النقطة O والمستوي (ABC).

$$d(O;(ABC))=\frac{|6\times0+3\times0+2\times0-6|}{\sqrt{36+9+4}}=\frac{6}{7}$$

5. H المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم (D).

أ - ايجاد احداثيات النقطة H.

لدينا $H\in(D)$ معناه $H\left(1-t;t;\frac{3}{2}t\right)$ و $\overrightarrow{BH}\left(1-t;t-2;\frac{3}{2}t\right)$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

ولدينا $\vec{u}.\overrightarrow{BH}=0$ معناه $-1(1-t)+(t-2)+\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}t=0$ تكافئ $2t+\frac{9}{4}t-3=0$ وتكافئ

$8t+9t-12=0$ أي $t=\frac{12}{17}$ ومنه $H\left(1-\frac{12}{17};\frac{12}{17};\frac{3}{2}\left(\frac{12}{17}\right)\right)$ أي $H\left(\frac{5}{17};\frac{12}{17};\frac{18}{17}\right)$.

ب ـ استنتاج المسافة بين النقطة B والمستقيم (D).

لدينا $\overrightarrow{BH}\left(\frac{5}{17};\frac{-22}{17};\frac{18}{17}\right)$ ومنه $BH=\frac{1}{17}\sqrt{25+484+324}=\frac{7\sqrt{17}}{17}$

وبالتالي $d(B;(D))=BH=\frac{7\sqrt{17}}{17}$.

التمرين الثاني:

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. الوحدة $2cm$

نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين: $z_A=i$ و $z_B=2$ على الترتيب

1. أ ـ تعيين لاحقة النقطة B_1 صورة النقطة B بالتحاكي h الذي مركزه A ونسبته $\sqrt{2}$

$h(B)=B_1$ معناه $z_{B_1}-z_A=\sqrt{2}(z_B-z_A)$ وتكافئ $z_{B_1}=\sqrt{2}(z_B-z_A)+z_A$ وتكافئ

$z_{B_1}=\sqrt{2}(2-i)+i$ أي $z_{B_1}=2\sqrt{2}+i(1-\sqrt{2})$

ب ـ تعيين لاحقة النقطة B' صورة النقطة B_1 بالدوران r الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

$r(B_1)=B'$ معناه $z_{B'}-z_A=e^{i\frac{\pi}{4}}(z_{B_1}-z_A)$ تكافئ $z_{B'}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}(2-i)\right)+i$

وتكافئ $z_{B'}=2-i+i(2-i)+i$ أي $z_{B'}=3+2i$

2. نعتبر التحويل النقطي f الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' بحيث:

$$z'=(1+i)z+1$$

أ ـ تعيين طبيعة التحويل f وعناصره المميزة؛ ثم استنتج أنّ B' هي صورة B بالتحويل f.

الكتابة المركبة للتحويل f من الشكل $z'=az+b$ حيث $a=1+i$ و $b=1$

لدينا $|a|=\sqrt{2}$ و $\arg(a)=\frac{\pi}{4}$

إذن f تشابه مباشر نسبته $\sqrt{2}$ زاويته $\frac{\pi}{4}$ ومركزه النقطة الصامدة ذات اللاحقة $\frac{1}{1-a}=\frac{1}{-i}=i$ أي مركزه A.

لدينا $r(B_1)=B'$ معناه $r(h(B))=B'$ وتكافئ $r\circ h(B)=B'$ إذن B' هي صورة B بالتحويل $r\circ h$

ولدينا $f=r\circ h$ أي B' هي صورة B بالتحويل f.

ب ـ بيّن أنه من أجل كل عدد مركب z يختلف عن i لدينا: $\frac{z'-z}{z_A-z}=-i$

$z'-z=(1+i)z+1-z=iz+1=-i(-z+i)=-i(z_A-z)$ ومنه $\frac{z'-z}{z_A-z}=-i$.

ج ـ استنتاج طبيعة المثلث AMM'.

لدينا $\frac{z'-z}{z_A-z}=-i$ إذن $\left|\frac{z'-z}{z_A-z}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{z'-z}{z_A-z}\right)=-\frac{\pi}{2}$ وهذا يعني أنّ $MM'=MA$ و

$\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MM'}\right)=-\frac{\pi}{2}$ وبالتالي المثلث AMM' قائم في M ومتساوي الساقين.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

3. أ ـ تحديد الطبيعة والعناصر المميزة لـ (E) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي بحيث: $|z-2|=\sqrt{2}$

$|z-2|=\sqrt{2}$ معناه $|z-z_B|=\sqrt{2}$ تكافئ $BM=\sqrt{2}$ إذن (E) هي الدائرة التي مركزها B ونصف قطرها $\sqrt{2}$.

ب ـ تبيين أنّ $z'-3-2i=(1+i)(z-2)$**، و استنتاج أنه إذا كانت $M\in(E)$ فإنّ M' تنتمي لدائرة (C)** يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

$$z'-3-2i=(1+i)z+1-3-2i=(1+i)z-2-2i=(1+i)(z-2)$$

لدينا $|z'-3-2i|=|(1+i)(z-2)|$ تعني $|z'-(3+2i)|=|1+i||z-2|$

وتكافئ $B'M'=\sqrt{2}BM$ ولدينا $M\in(E)$ معناه $BM=\sqrt{2}$ ومنه $B'M'=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$

إذن M' تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها B' ونصف قطرها 2.

التمرين الثالث:

1. نعتبر الدّالة f المعرّفة على $[0;+\infty[$ بالشكل: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x};x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

. تبيين أنّ f مستمرة عند 0.

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1=f(0)$$

إذن الدالة f مستمرة عند 0.

2. لتكن الدّالة g المعرّفة على $[0;+\infty[$ بالشكل: $g(x)=\ln(x+1)-\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\right)$

أ ـ دراسة اتجاه تغيّر الدّالة g.

الدالة g تقبل الإشتقاق على $[0;+\infty[$ ولدينا

$$g'(x)=\frac{1}{x+1}-\left(1-x+x^2\right)=\frac{1-(x+1)\left(1-x+x^2\right)}{x+1}=\frac{-x^3}{x+1}$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $x+1>0$ و $-x^3<0$ ومنه $g'(x)<0$

وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على $[0;+\infty[$.

ب ـ حساب $g(0)$.

$$g(0)=\ln(0+1)-\left(0-\frac{0}{2}+\frac{0}{3}\right)=0$$

استنتاج أنّه على المجال $[0;+\infty[$: $\ln(x+1)\leq\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\right)$.

الدالة g متناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$ ولدينا $g(0)=0$ إذن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$، $g(x)\leq 0$ ومنه $\ln(x+1)-\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\right)\leq 0$ أي $\ln(x+1)\leq\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\right)$

جـ ـ بطريقة مماثلة، تبيين أنّه على المجال $\left[0;+\infty\right[$ **:** $\ln(x+1)\geq\left(x-\frac{x^2}{2}\right)$.

نعتبر الدالة u المعرفة على المجال $\left[0;+\infty\right[$ بـ: $u(x)=\ln(x+1)-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)$

الدالة u تقبل الإشتقاق على $\left[0;+\infty\right[$ ولدينا $u'(x)=\frac{1}{x+1}-(1-x)=\frac{1-(x+1)(1-x)}{x+1}=\frac{x^2}{x+1}$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]0;+\infty\right[$: $u'(x)>0$ وبالتالي الدالة u متزايدة تماما على $\left[0;+\infty\right[$

ولدينا $u(0)=0$ إذن من أجل كل $x\in\left[0;+\infty\right[$: $u(x)\geq 0$ ومنه $\ln(x+1)-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\geq 0$

أي $\ln(x+1)\geq\left(x-\frac{x^2}{2}\right)$

د ـ استنتاج، من الأسئلة السابقة أنّ: $-\frac{1}{2}\leq\frac{\ln(x+1)-x}{x^2}\leq-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}$.

لدينا مما سبق $x-\frac{x^2}{2}\leq\ln(x+1)\leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ ومنه $-\frac{x^2}{2}\leq\ln(x+1)-x\leq-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

ويكافئ $-\frac{1}{2}\leq\frac{\ln(x+1)-x}{x^2}\leq-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}$.

استنتاج أنّ f قابلة للاشتقاق عند 0.

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\frac{\ln(x+1)}{x}-1}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\frac{\ln(x+1)-x}{x}}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\ln(x+1)-x}{x^2}$$

ولدينا $-\frac{1}{2}\leq\frac{\ln(x+1)-x}{x^2}\leq-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}$

بما أنّ $\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}\right)=-\frac{1}{2}$ إذن حسب النهايات بالمقارنة فإن: $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\ln(x+1)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}$

إذن الدالة f تقبل الإشتقاق عند 0.

3. لتكن الدالة h المعرّفة على $\left[0;+\infty\right[$ بـ: $h(x)=\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)$.

أ ـ دراسة اتجاه تغيّر الدّالة h، و تعيين إشارة $h(x)$ حسب قيّم x.

الدالة h تقبل الإشتقاق على $\left[0;+\infty\right[$ ولدينا: $h'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}=\frac{-x}{(x+1)^2}$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]0;+\infty\right[$ لدينا $h'(x)<0$ وبالتالي الدالة h متناقصة تماما على $\left[0;+\infty\right[$

وبما أنّ $h(0)=0$ فإنه لكل $x\in\left[0;+\infty\right[$: $h(x)\leq 0$.

ب ـ تبيين أنّه من أجل كل x من $\left]0;+\infty\right[$ **:** $f'(x)=\frac{h(x)}{x^2}$.

ليكن $x\in\left]0;+\infty\right[$:

aziz_mus1@hotmail.fr

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x+1}\right)x-\ln(x+1)}{x^2}=\frac{\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)}{x^2}=\frac{h(x)}{x^2}$$

من أجل كل $x\in]0;+\infty[$: $h(x)<0$ و $x^2>0$ ومنه $f'(x)<0$ وبالتالي الدالة f متناقصة تماما على $[0;+\infty[$.

جـ - جدول تغيّرات f مع توضيح نهاية f عند $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1}\times\frac{x+1}{x}$$

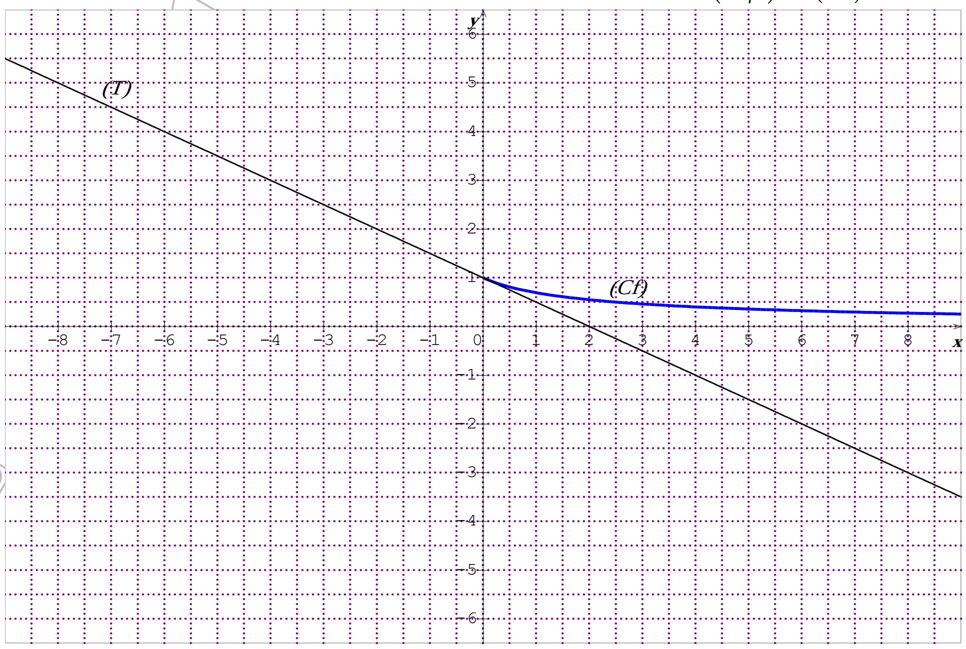
لدينا $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=1$ إذن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$1 \searrow 0$

د - كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ومنه $y=-\frac{1}{2}x+1$ وهي معادلة للمماس (T).

4. رسم (T) و (C_f).



aziz_mus1@hotmail.fr

التمرين الرابع:

f (I هي الدالة المعرّفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-\ln(x-1)$

1) **تحديد حسب قيم** x، **إشارة** $f(x)-x$

$$f(x)-x=-\ln(x-1)$$

$f(x)-x=0$ تعني $-\ln(x-1)=0$ وتكافئ $\ln(x-1)=0$ أي $x=2$

$f(x)-x>0$ تعني $-\ln(x-1)>0$ وتكافئ $\ln(x-1)<0$ وتكافئ $0<x-1<1$ أي $1<x<2$

$f(x)-x<0$ تعني $-\ln(x-1)<0$ وتكافئ $\ln(x-1)>0$ وتكافئ $x-1>1$ أي $x>2$

2) أ ـ **تعيين اتجاه تغيّر الدالة** f.

الدالة f تقبل الإشتقاق على $]1;+\infty[$ كونها مجموع دالتين تقبلان الإشتقاق على هذا المجال ولدينا:

$$f'(x)=1-\frac{1}{x-1}=\frac{x}{x-1}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ لدينا $f'(x)>0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $]1;+\infty[$.

ب ـ تبيين أنه إذا كان $x\in[2;e+1]$ **فإنّ** $f(x)\in[2;e+1]$

لدينا f متزايدة تماما على $]1;+\infty[$.

إذا كان $2\le x\le e+1$ فإن $f(2)\le f(x)\le f(e+1)$ ومنه $2\le f(x)\le e$ أي $2\le f(x)\le e+1$

إذن من أجل $x\in[2;e+1]$ فإنّ $f(x)\in[2;e+1]$

(u_n) (II المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0=e+1$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_{n+1}=u_n-\ln(u_n-1)$

1) **برهان بالتراجع أنه من أجل كل** n **من** $\mathbb{N}$، $u_n\in[2;e+1]$.

لدينا $u_0=e+1$ ومنه $u_0\in[2;e+1]$ أي مرحلة الأبتداء صحيحة.

ليكن k عددا طبيعيا.

نفترض أنّ $u_k\in[2;e+1]$ ولنبرهن أن $u_{k+1}\in[2;e+1]$

لدينا $u_k\in[2;e+1]$ وحسب نتيجة السؤال 2) أ. فإن $u_{k+1}\in[2;e+1]$

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n\in[2;e+1]$

2) **دراسة اتجاه تغيّر المتتالية** (u_n).

لدينا من أجل كل $x\in[2;+\infty[$: $f(x)-x\le 0$

ولدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n\in[2;e+1]$ ومنه $f(u_n)-u_n\le 0$ أي $u_{n+1}-u_n\le 0$ وعليه المتتالية (u_n) متناقصة.

3) **تبرير تقارب المتتالية** (u_n)،

بما أن (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 2 فهي متقاربة.

حساب نهايتها.

بما أن (u_n) متقاربة فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$ حيث $l\in\mathbb{R}$ ولدينا $u_{n+1}=f(u_n)$ وبما أن الدالة f مستمرة على $]1;+\infty[$ فإن $l=f(l)$ ومنه $l=2$ وعليه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$.

aziz_mus1@hotmail.fr